ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — mai 1978

Concours de recrutement
d'élèves-ingénieurs des études et de l'exploitation
de l'aviation civile

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

I

E_p est un espace vectoriel réel, de dimension p et dont les éléments $e_o, e_1, \ldots, e_{p-1}$ forment une base.

f est une forme bilinéaire sur E X E à valeur réelle, symétrique et telle que, pour tout élément x de E_p non nul, $f(x,x) > o$.

Si deux éléments x et y de E_p sont tels que $f(x,y) = o$, on dit qu'ils sont orthogonaux relativement à f.

On pose $x_o = e_o$.

1.1. Pour tout $o \leqslant k \leqslant p - 1$, déterminer les nombres $a_k^o, a_k^1, \ldots, a_k^{k-1}$ et les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ de telle sorte que l'élément

$$x_k = e_k + a_k^{k-1} x_{k-1} + \ldots + a_k^1 x_1 + a_k^o x_o$$

soit orthogonal, relativement à f, à $x_o, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

1.2. Démontrer que, pour tout $o \leqslant k \leqslant p - 1$, les éléments $x_o, x_1, \ldots, x_k$ sont tous non nuls et qu'ils forment une base de l'espace vectoriel E_k engendré par $e_o, e_1, \ldots, e_k$.

.../...

II

On considère une fonction z de la variable réelle t qui, pour tout $t \in]-1, +1[$ est continue, paire et strictement positive et telle que l'intégrale, éventuellement impropre, $\int_{-1}^{+1} z(t)\,dt$ existe.

Soit E l'espace vectoriel réel que forme l'ensemble des fonctions polynômes à une indéterminée réelle dont les coefficients sont réels.

2.1. Soit p et q des éléments de E, démontrer que l'intégrale, éventuellement impropre, $\int_{-1}^{+1} z(t)\,p(t)\,q(t)\,dt$ existe.

2.2. Démontrer que l'application f de E X E dans R qui associe à $(p,q) \in E \times E$ le nombre $f(p, q) = \int_{-1}^{+1} z(t)\,p(t)\,q(t)\,dt$ est une forme bilinéaire symétrique et que, si p n'est pas le polynôme identiquement nul, $f(p,p) > 0$.

Montrer, p étant une fonction paire et q une fonction impaire de E, que $f(p,q) = 0$.

Montrer, p, q, r étant des polynômes de E, que :

$f(p, qr) = f(pr, q)$.

III

Pour tout $k \in N$, on définit les fonctions monômes e_k éléments de E par $e_k(t) = t^k$.

3.1. Démontrer, pour tout n N, que les fonctions $e_0, e_1, \ldots, e_n$ forment une base du sous espace vectoriel E_{n+1} de E qu'elles engendrent.

3.2. En utilisant la méthode définie dans la première partie, construire la suite $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ d'éléments de E qui, relativement à la forme f étudiée dans la deuxième partie, sont deux à deux orthogonaux et tels que le degré de $p_n - e_n$ soit strictement inférieur à n.

.../...

3.3. Démontrer, pour tout $n \in N$, que p_n est de degré n et orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n. Montrer que p_n est une fonction paire ou impaire selon la parité de n.

3.4. On désigne par $t_1, t_2, \ldots, t_i$ les zéros de p_n qui appartiennent à $]-1, +1[$ et dont la multiplicité est impaire. Désignant par r la fonction polynôme définie par $r(t) = (t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_i)$, démontrer que $f(p_n, r)$ est différent de zéro.

En déduire, pour tout n entier positif, que tous les zéros de p_n sont réels et simples et qu'ils appartiennent à $]-1, +1[$.

3.5. Calculer, sur la base de E_{n+1} formée par $p_o, p_1, \ldots, p_n$, les composantes de la fonction polynôme s_n définie par $s_n(t) = p_n(t) - t\, p_{n-1}(t)$.

IV

On définit dans E la suite d'éléments $q_o, q_1, \ldots, q_n, \ldots$,

par $q_n(t) = \dfrac{p_n(t)}{p_n(1)}$.

4.1. Montrer que les éléments de cette suite vérifient, pour tout t, une relation de récurrence de la forme :

$$q_n(t) = u_n\, t\, q_{n-1}(t) + v_n\, q_{n-2}(t),$$

dans laquelle u_n et v_n sont deux réels dont on déterminera les valeurs respectives ; vérifier que $u_n + v_n = 1$.

4.2. On fait l'hypothèse que la fonction z définissant la forme f est telle que $v_n = -1$ pour tout $n > 1$.

Démontrer alors que $f(q_n, q_n)$ est indépendant de n et que $q_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in R$.

4.3. Démontrer que pour la fonction z définie par $z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ pour tout $t \in]-1, +1[$, l'hypothèse faite en 4.2. est vérifiée.

.../...

4.4. On pose, pour tout $t \in]-1, +1[$, Arcos $t = \theta$ et, pour la fonction z définie en 4.3., $\phi_n(\theta) = q_n(t)$. Calculer $\dfrac{d^2 \phi_n(\theta)}{d\theta^2}$ en fonction de t et des dérivées de q_n et montrer que q_n est solution, sur tout R, d'une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients ne sont pas tous des constantes.

En déduire les coefficients du polynôme q_n.

V

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$, de rayon de convergence ρ non nul, dont la somme y(t) est solution sur $]-\rho, +\rho[$ de l'équation différentielle.

$$D_t : (1 - t^2)\, y'' - t\, y' + n^2\, y = 0, \qquad n \in N$$

5.1. Déterminer la relation (R) que vérifient les coefficients b_m.

Selon la parité de n, construire : toutes les suites $\{b_m\}$ dont les termes vérifient (R) et dont les termes pairs sont nuls ; puis toutes les suites $\{b_m\}$ dont les termes vérifient (R) et dont les termes impairs sont nuls.

5.2. Montrer que D_t admet des solutions proportionnelles au polynôme q_n défini en 4.4. et en déduire, à nouveau, les coefficients de q_n.

Montrer que D_t admet aussi comme solution des fonctions g_n, développables en séries entières, qui ne sont pas des polynômes.

Préciser le rayon de convergence du développement en série entière de ces fonctions g_n.

5.3. On pose : $g_n(t) = (1 - t^2)^{1/2}\, h_n(t)$.

Déterminer une équation différentielle du second ordre (H_t) que vérifie $h_n(t)$.

.../...

On suppose que la somme $h_n(t)$ de la série entière $\sum_{m=o}^{\infty} c_m t^m$ est solution de (H_t) et que le rayon de convergence de celle-ci n'est pas nul.

Déterminer la relation de récurrence que vérifient les coefficients c_m.

En déduire que parmi les solutions de H_t figurent des polynômes proportionnels entre eux, qui sont des fonctions paires ou impaires selon la parité de n et dont on précisera le degré effectif.

VI

t_o appartenant à $]-1, +1[$; on considère la famille $\{\pi_{n,t_o}\}$ des polynômes π_n de E qui satisfont aux conditions suivantes : ils sont de degré n et ce sont des fonctions de même parité que n ; tous les zéros de π_n sont réels et appartiennent à $]-1, +1[$; le plus grand des zéros de π_n est t_o ; $\pi_n(1) = 1$.

6.1. Soit τ_1 le plus grand des zéros du polynôme q_n défini à la question 4.4. Montrer que le polynôme $\hat{q}_n$, défini par

$$\hat{q}_n(t) = \frac{q_n\left(\frac{\tau_1}{t_o}\, t\right)}{q_n\left(\frac{\tau_1}{t_o}\right)}$$

, appartient à la famille π_{n,t_o}.

Déterminer les extrema de $\hat{q}_n$ pour $t \in]-t_o, +t_o[$.

6.2. π_n étant un polynôme quelconque de la famille $\{\pi_{n,t_o}\}$, démontrer que :

$$\sup_{t \in [-t_o, +t_o]} \{\hat{q}_n(t)\} = \inf_{\pi_n \in \pi_{n,t_o}} \left\{ \sup_{t \in [-t_o, +t_o]} \{|\pi_n(t)|\} \right\},$$

on pourra raisonner par contradiction en étudiant le signe de

$$\delta(t) = \hat{q}_n(t) - \pi_n(t).$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail